Une application du lemme de la Grenouille

I. blablabla (pas pour le dev mais ça motive un peu)

Proposition I.0.1.
Si une suite récurrente a deux fois la même valeur, alors elle est périodique.

Corollaire I.0.2.
Une suite récurrente dont le pas tend vers 0 n'a jamais deux fois la même valeur.

Donc une suite non injective et dont le pas tend vers 0 n'est pas récurrente. Peut-on relaxer cette hypothèse ? Le lemme de la Grenouille permet de la remplacer par "ayant deux valeurs d'adhérences différentes" (de façon équivalente : ne convergeant pas). Ce raffinement est strictement plus fin puisque la suite qu'on va étudier est en général injective.

Proposition I.0.3.
Si α/π est de degré superieur à 2 strictement sur $\mathbb{Q}$ (par exemple : prendre $\alpha = 1$, ou n'importe quel rationnel, voire n'importe quel nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$ car π est transcendant), alors $(\cos(\alpha\sqrt{n}))_n$ est injective.

Preuve. Si $\cos(\alpha\sqrt{n}) = \cos(\alpha\sqrt{m})$, alors il existe k (supposons non nul par l'absurde) tel que $\alpha\sqrt{m} = \pm\sqrt{n} + 2k\pi$. En notant $\varepsilon = \pm 1$, on a donc $\alpha\frac{\sqrt{m}-\varepsilon\sqrt{n}}{2k} = \pi$. Cela contredit les hypothèses sur α/π et donc sur k. □

II. Une application du lemme de la Grenouille

Proposition II.0.1.
Soit $\alpha > 0$. La suite $(u_n)_n = (\cos(\alpha\sqrt{n}))_n$ n'est pas une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $f : [-1,1] \to [-1,1]$ continue.

Preuve. **Le pas tend vers 0** car, par l'inégalité des accroissements finis,

$$|u_{n+1} - u_n| = \left|\cos(\alpha\sqrt{n+1}) - \cos(\alpha\sqrt{n})\right| \leqslant \|\cos'\|_\infty \alpha\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right|$$
$$\leqslant \alpha\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = \alpha\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\right) \to 0.$$

Elle ne converge pas car puisque $\alpha\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \to 0$, la suite $(\alpha\sqrt{n})_n$ va rentrer une infinité de fois dans l'ensemble $\bigcup_n]2\pi n - \frac{\pi}{4}, 2\pi n + \frac{\pi}{4}[$ mais aussi dans l'ensemble $\bigcup_n]\pi + 2\pi n - \frac{\pi}{4}, \pi + 2\pi n + \frac{\pi}{4}[$ (faire un dessin. En quelque sorte, c'est encore une histoire de grenouilles qui tombent dans des rivières). Dans le premier cas, on a que $u_n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, dans le second, $u_n \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc (u_n) ne peut pas converger. □

Remarque II.0.2. Le résultat a un peu plus d'intérêt si α est incommensurable à π. En effet, si α/π était rationnel, alors on peut constater que (u_n) atteint certaines valeurs une infinité de fois (comme 1 et -1). Sachant que le pas de (u_n) tend vers 0, il devient alors plus facile de conclure que (u_n) n'est pas récurrente : si f existait, alors l'image de 1 par f ne serait pas bien définie (de plus en plus proche de 1 en quelque sorte).

Sans cette hypothèse, ni utiliser le lemme de la grenouille, on peut quand même produire quelque chose. En effet, le pas de (u_n) tend vers 0, et $(u_n)_n$ a pour valeur d'adhérence 1 et -1, donc l'adhérence de (u_n) est l'ensemble $[-1,1]$. Si φ est une extractrice associée à un x, alors $u_{\varphi(n)} \to x$ mais comme $f(u_n) - u_n \to 0$, on a aussi $f(u_n) \to x$. Mais f est continue donc $f(x) = x$ donc $f = \mathrm{id}$... en fait c'est un peu redémontrer le lemme de la grenouille dans le cas simple de la dimension 1... donc cette application est bel et bien une bonne illustration du lemme de la grenouille.

Contactez-moi en cas de coquille s'il vous plaît ! prenom.nom@ens-lyon.fr